XX научно-практическая конференция «Шаг в будущее»:

«Линейное программирование на страже здоровья человека»

Выполнила:

Юзаю Ксения Александровна,

ученица 10 «а» класса МБОУ СОШ №37.

Научный руководитель:

Конева Галина Михайловна,

учитель математики МБОУ СОШ №37,

«Отличник просвещения РФ»,

Победитель Конкурса лучших учителей России(2009 г)

Улан-Удэ

2013

Рецензия

Ученица 10»а» класса МБОУ СОШ №37 Юзаю Ксения вот уже второй год продолжает исследовательскую работу по теме «Линейное программирование». Методы линейного программирования позволяют **наиболее рациональным образом распределить ограниченные ресурсы, рассчитать максимальную выгоду или минимальные затраты** Ее интересуют задачи прикладного характера. Например, в прошлом году она исследовала вопрос о наиболее выгодной аренде воздушного судна па примере авиакомпании «Бурятские авиалинии». В настоящем докладе она исследует вопрос определения диеты человека, **то есть определения такого набора продуктов, который, с одной стороны, обеспечивал бы жизненные потребности человека в белках, жирах, углеводах, микроэлементах, витаминах, а с другой – имел бы минимальную стоимость.**

В процессе работы над докладом Ксения исследовала цены на продукты в различных магазинах поселков Аэропорт и Сокол, дала им сравнительную характеристику.

Интересен тот факт, что ученица самостоятельно изучила метод Гаусса-Жордана для решения систем линейных уравнений с несколькими переменными и применила его в одной из задач. Не менее интересно также то, что Ксения в своей семье стала проводником здорового питания. Как эти факты, так и работа в целом над докладом является полезным воспитательным моментом для будущего выпускника школы, так как представляет собой элементы экономического образования. Экономическое образование становиться особенно актуальным в наше время. **Актуальность экономического образования и воспитания в наши дни обусловлена необходимостью адаптации выпускников школы к динамично изменяющимся социально-экономическим условиям жизни, повышенными требованиями к личностным качествам будущих кадров рыночной экономики - их активности, самостоятельности, компетентности, деловитости.**

Работая над докладом, она изучила и проанализировала множество различных статей и докладов из Интернета, получила консультацию от врача-диетолога из Республиканского Центра здоровья (улица Жердева,100). Ученица проделала большую **самостоятельную** работу, и этот доклад будет интересен учащимся, увлекающимся математикой, будущим экономистам.

Учитель математики высшей категории: Конева Г.М.

План

I. Введение

II. Из истории линейного программирования

III. Задача о диете

1) Общая формулировка задачи о диете

2) Пример решения общей задачи о диете графическим методом.

IV. Проблема подбора оптимального количества пищевых продуктов для составления диеты.

Задача№1. Расчет диеты по трем базовым органическим веществам - белкам, жирам и углеводам.

Задача№2. Расчет диеты по макроэлементам: кальций, магний, калий и фосфор.

Задача№3. . Составление рациона питания, включающего в себя самый важный макроэлемент-кальций.

Задача№4. Составление рациона питания, включающего в себя жизненно важный витамин С.

Задача№5.Из *Исследования Операций: Приложения и Алгоритмы, Издание четвертое*, автор Вейн Л. Уинстон

V. Заключение.

VI. Список использованной литературы и Интернет - ресурсов.

I. Введение.

«Скажи мне, что ты ешь, и я скажу, чем ты болеешь» - Гиппократ.

Линейное программирование — область математического программирования, посвященная теории и методам решения экстремальных задач, характеризующихся линейной зависимостью между переменными. Рассмотренная ниже задача о диете относится к схеме линейного программирования.

Слово «диета» обычно употребляется в двойном значении: как еда и как режим питания. Словарь Брокгауза и Эфрона дает такое определение: «Под диетой подразумевается пищевой режим, устанавливаемый для здоровых и больных соответственно возрасту, телосложению, профессии, климату, временам года и т. д.». О том же сообщает и Советский энциклопедический словарь: «Диета — специально подобранный по количеству, химическому составу, калорийности и кулинарной обработке рацион питания». Почему-то у многих людей сложилось представление, что диета является одной из систем ограничения, сознательным или вынужденным отказом от радости вкусного и разнообразного стола. А вот древнегреческое толкование понятия «диета» имело более глубокий смысл. «Diaita» — образ жизни, способ действия, взгляд на реальность текущего времени.

В таком понимании **диета есть не что иное, как искусство управления своими потребностями, соблюдения разумного режима питания, понимания биологических ритмов своего организма, согласования своей жизни с природой.** Наука довольно рано обосновалась на благодатном диетическом поле, создавая все новые и новые способы оздоровления человека и лечения всяческих недугов. Диетология стала важнейшей частью медицины, укрепляя свой авторитет скрупулезно разработанными и научно выверенными рецептами питания. А математика и ее методы стали тем инструментарием, без которого не может существовать диетология. В данной статье я изучила и исследовала те методы, которые «стоят на страже» такой науки, как «диетология».

II. Из истории линейного программирования

Методы линейного программирования были разработаны только в середине XX века, намного позже, чем классические приемы нахождения экстремума, опирающиеся на работы Ферма (1601-1665), Лангаржа (1736-1813) и других великих математиков прошлых столетий. К тому же практическая потребность решать задачи, приводящие к линейному

программированию, появились лишь тогда, когда экономика столкнулась с проблемой планирования крупномасштабных производств.

Первые работы по линейной оптимизации принадлежат выдающемуся советскому математику Леониду Витальевичу Канторовичу (1912-1986). В 1938 году он консультировал фанерный трест по проблеме эффективного использования лущильных станков. Канторович понял, что проблема сводится к максимизации линейной функции многих переменных при наличии ограничений в форме линейных равенств и неравенств. Он модифицировал метод множителей Лангаржа для ее решения и осознал, что к такого рода задачам сводится множество проблем экономики. В 1939 году опубликовал работу «Математические методы организации и планирования производства», в которой описал задачи экономики, поддающиеся открытому им математическому методу. К сожалению, в то время эти пионерские результаты не были должным образом оценены из-за косности официальной советской экономической науки, которая не терпела вторжения «механистической» математики в ее святая святых – маркистско-ленинское экономическое учение.

Признание в своей стране пришло намного позже, в 1960-е годы, а в 1975 г. Канторович совместно с американским экономистом голландского происхождения Тьяллингом Купмансом был удостоен Нобелевской премией по экономике «за вклад в теорию оптимального распределения ресурсов».

На Западе отцом-основателем этого направления считают американского математика Джорджа Данцинга. В годы Второй мировой войны он занимался программированием поставок военной техники. Данцинг предложил использовать военную модель для оптимизации планирования и изобрел универсальный численный метод решения – симплексный метод. До окончания войны эти результаты считались секретными и были опубликованы только в 1947 году, вызвав взрыв интереса к новой области науки, которая с подачи Данцинга получила название «линейное программирование».

На протяжении следующих десятилетий линейное программирование бурно развивалось. Во-первых, появились новые направления, обобщающие классическую задачу: параметрическое линейное программирование, целочисленное линейное программирование, блочное программирование и т.д. Во-вторых, для отдельных задач (транспортная задача, задача о назначениях, задача о наибольшем потоке в сети и др.) были разработаны специализированные и чрезвычайно эффективные методы решения. Наконец, для всех поколений и типов компьютеров были созданы пакеты прикладных программ, реализующие различные методы линейного программирования.

Один из видов классических задач линейного программирования связан с проблемой подбора оптимального набора пищевых продуктов для составления диеты.

Для того чтобы жить, человек должен ежедневно получать в необходимых количествах белки, жиры, углеводы, витамины, микроэлементы и прочие питательные вещества. Эти вещества попадают в организм с разнообразными пищевыми продуктами.

Задача данной исследовательской работы состоит в определении такого набора продуктов, который, с одной стороны, обеспечивал бы жизненные потребности человека, а с другой – имел бы минимальную стоимость.

III. Задача о диете

1) Общая формулировка задачи о диете

I. *Содержательное описание*

Имеется несколько видов продуктов. **Определить рацион питания (количество каждого вида продукта) так, чтобы были обеспечены нижние границы норм потребления некоторых питательных веществ, а стоимость рациона была наименьшая.** Цены за единицу каждого продукта известны.

II. *Математическая модель*

2.1. *Исходные параметры*

n – количество видов продукта

m – количество контролируемых питательных веществ

b_i, $i=\overline{1,m}$ – нормы потребления каждого питательного вещества (нижние границы)

a_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ – содержание i-го питательного вещества в единице j-го продукта

c_j, $j=\overline{1,n}$ – цена каждого продукта

2.2. *Управляемые параметры (варьируемые параметры)*

x_j, $j=\overline{1,n}$ – объем закупок каждого продукта

$\bar{x}=(x_1,x_2,.....x_n)$ – вектор управляемых параметров (решение, план закупок или рацион)

2.3. *Ограничения модели*

Потребление каждого питательного вещества не должно быть ниже нормы. Пусть $g_i(\bar{x})$ – содержание i-го питательного вещества в произвольном рационе $\bar{x}$.

$$D\begin{cases} g_i(\bar{x}) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \geq b_i, \quad i=\overline{1,m} \\ x_j \geq 0, \quad j=\overline{1,n} \end{cases}$$

Нужно выбрать наилучшее решение.

III. *Формулировка цели принятия решений*

Сформулируем критерий оптимальности. Пусть $F(\bar{x})-$ стоимость произвольного рациона $\bar{x}$. Требуется найти рацион наименьшей стоимости

$$F(\bar{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \min$$

Таким образом, задача о диете ставится как задача определения такого набора управляемых параметров

$$\bar{x} = (x_1, x_2, ...x_n),$$

при которых достигается наименьшее значение критерия

$$F(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min \qquad (4)$$

при условии

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = \overline{1,m} \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n} \end{cases}$$

2) Пример решения общей задачи о диете графическим методом.

Для сохранения здоровья и работоспособности человек должен в сутки потреблять не менее 69 условных ед. белков, не менее 84 условных ед. жиров, не менее 39 условных ед. углеводов. Имеется два вида продуктов Π_1 и Π_2: стоимость единицы каждого из них равна соответственно 4 и 12 ден. ед. Имеем таблицу содержания белков, жиров и углеводов в продуктах Π_1 и Π_2:

	Белки	Жиры	Углеводы
Продукт Π_1	3	21	3
Продукт Π_2	16	4	6

Требуется составить математическую модель задачи, позволяющую сформировать из продуктов Π_1 и Π_2 суточную диету, которая содержала бы белков, жиров и углеводов не меньше минимальных обоснованных норм и требовала бы минимальных денежных затрат. Решим данную задачу графическим способом.

Решение.

Обозначим через x_1 и x_2 количества единиц соответственно продуктов $П_1$ и $П_2$, которые составят суточную диету, а через f - затраты, связанные с приобретением продуктов. Тогда целевую функцию f в принятых обозначениях и с учетом цен на продукты можно записать в виде:

$$f = 4x_1 + 12x_2 \qquad (1.1)$$

где $4x_1$ - стоимость x_1 единиц продукта $П_1$, $12x_2$ - стоимость x_2 единиц продукта $П_2$. Состав (x_1, x_2) суточной диеты должен удовлетворять упомянутым в задаче ограничениям на содержание в нем белков, жиров и углеводов. Например, **белков** в x_1 единицах продукта $П_1$ будет присутствовать $3x_1$ усл. ед, **белков** в x_2 единицах продукта $П_2$ будет присутствовать $16x_2$ условных ед., так что общее количество **белка** в диете составит $3x_1 + 16x_2$ условных единиц. По условию задачи эта сумма должна быть не меньше 69, что можно выразить неравенством:

$$3x_1 + 16x_2 \geq 69 \qquad (1.2)$$

Проводя аналогичные рассуждения в отношении жиров и углеводов, получим еще два неравенства, которым должны удовлетворять переменные x_1 и x_2 :

$$21x_1 + 4x_2 \geq 84 \qquad (1.3)$$

$$3x_1 + 6x_2 \geq 39 \qquad (1.4)$$

По смыслу задачи переменные x_1 и x_2 не могут выражаться отрицательными числами, откуда

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \qquad (1.5)$$

Соотношения (1.1) - (1.5) **образуют математическую модель данной задачи**. Таким образом, математическая задача состоит в нахождении решения x_1 и x_2 системы неравенств (1.2)-(1.5), доставляющего минимум функции (1.1).

Построим на координатной плоскости $(x_1 0 x_2)$ область допустимых решений системы неравенств (1.2)-(1.5). Запишем уравнения граничных прямых, соответствующих неравенствам (1.2)-(1.5):

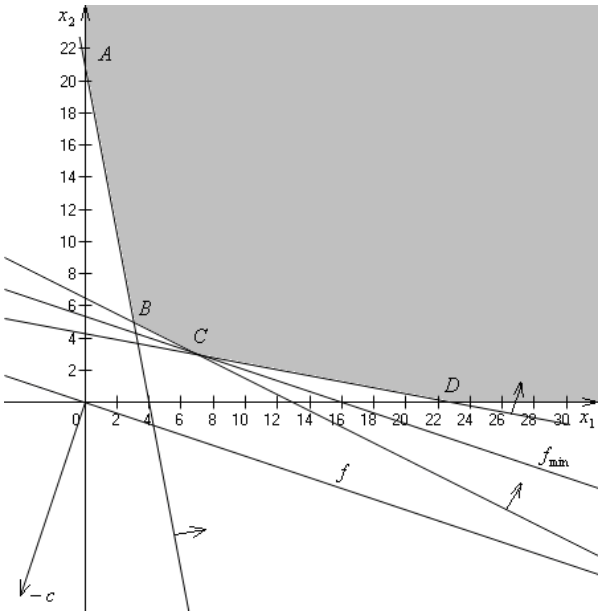
$$3x_1 + 16x_2 = 69 \qquad (1.6)$$

$$21x_1 + 4x_2 = 84 \qquad (1.7)$$

$$3x_1 + 6x_2 = 39 \qquad (1.8)$$

Учитывая, что неравенства (1.5) определяют первую четверть координатной плоскости $x_1 0 x_2$, находим область допустимых решений системы неравенств (1.2)-(1.5), как

общую часть (пересечение) всех установленных полуплоскостей. В нашем случае это выпуклая неограниченная многоугольная область с вершинами A, B, C и D (см. рис.).



Остается в этой области найти точку, координаты которой доставляют минимум функции (1.1). Из рисунка видно, что последней (крайней) точкой области допустимых решений является точка C. Именно в этой точке функция и достигает наименьшего значения. Координаты точки C находятся в результате совместного решения уравнений прямых (1.6) и (1.8) – граничных прямых BC и CD, пересекающихся в этой точке:$3\cdot x_1+16\cdot x_2=69$; $3\cdot x_1+6\cdot x_2=39$. Итак, $x_1=7$; $x_2=3$ и $f=4\cdot 7+12\cdot 3=6$. **Итак по оптимальному плану в суточную диету следует включить 7 единиц продукта $П_1$ и 3 единицы продукта $П_2$. При этом затраты будут минимальными и составят 64 денежных единицы.**

IV. Проблема подбора оптимального количества пищевых продуктов для составления диеты на примерах конкретных продуктов.

На примере рассмотренных выше задач я начала проводить собственное исследование и свои расчеты.

Задача №1.Расчет диеты по трем базовым органическим веществам - белкам, жирам и углеводам.

Исследуем классическую задачу линейного программирования, связанную с проблемой подбора оптимального набора пищевых продуктов для составления диеты **по трем базовым органическим веществам - белкам, жирам и углеводам.**

Эти вещества попадают в организм с разнообразными пищевыми продуктами. Химический состав продуктов известен, соответствующие таблицы опубликованы в справочниках по кулинарии и диетике. Из этих справочников я выписала таблицу:

№	Органическое вещество	Суточная потребность человека (в кг)
1.	Белки	0,1
2.	Жиры	0,1
3.	Углеводы	0,4

Таким образом, суточная потребность беков, жиров и углеводов для человека равна соответственно 0,1, 0,1 и 0,4 кг. Из всего многообразия пищевых продуктов выберем для примера шесть:

- **рыбу (нежирную),**
- **растительное масло,**
- **сахар,**
- **мясо,**
- **молоко и**
- **хлеб.**

Содержание базовых питательных веществ в 1кг на 1 кг указанных продуктов приведено в таблице. Остальное – вода, клетчатка и прочие не учитываемые в данной модели ингредиенты.

	Рыба	Масло	Сахар	Мясо	Молоко	Хлеб
Белки	0,12	0	0	0,13	0,03	0,07
Жиры	0	1	0	0,03	0,03	0
Углеводы	0	0	1	0	0,05	0,5

Для определения стоимости диеты нужно знать цены продуктов, которые, к слову сказать, постоянно меняются в сторону повышения. Для того, чтобы решить **задачу о биологическом прожиточном минимуме** при данном уровне цен, **я исследовала уровень цен** в различных магазинах поселков Аэропорт и Сокол. Здесь я привожу округленные средние цены продуктов за 1 килограмм нескольких магазинов 8 -9 декабря 2012 года:

Название магазина	Рыба (горбуша)	Масло (сливочное, «Крестьянское»)	Сахар	Мясо (свинина)	Молоко	Хлеб
«Барис»	82	185	35	220	45	25
«Николаевский»	-	180	32	200	42	-
«Либерти»	68	150	27	170	35	19
«Виктория»	90	179	34	230	45	23
«Молоко	-	167	30	-	40	-

Бурятии»						

Анализируя данную таблицу, можно сделать вывод, что наиболее низкие цены в магазине «Либерти». Если обозначить количество рыбы в суточной диете через x_1, количество масла через x_2, количество сахара -x_3, мяса-x_4, молока-x_5, хлеба-x_6,то **задача оптимизации диеты** сводится к минимизации линейной целевой функции:

$F(x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6) = 68\cdot x_1 + 150\cdot x_2 + 27\cdot x_3 + 170\cdot x_4 + 35\cdot x_5 + 19\cdot x_6$

Составим уравнение с помощью данных из таблицы на суточную потребность **белков**, исходя из данного рациона питания:

$0{,}12\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 0{,}13\cdot x_4 + 0{,}03\cdot + 0{,}07\cdot = 0{,}1.$

Аналогично для **жиров:** $x_2 + 0{,}03\cdot x_4 + 0{,}03\cdot x_5 = 0{,}1.$

И далее для **углеводов:** $x_3 + 0{,}05\cdot x_5 + 0{,}5\cdot x_6 = 0{,}4.$

Запишем данные линейные ограничения- равенства в виде системы:

$0{,}12\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 0{,}13\cdot x_4 + 0{,}03\cdot x_5 + 0{,}07\cdot x_6 = 0{,}1.$

$0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 0{,}03\cdot x_4 + 0{,}03\cdot x_5 + 0\cdot x_6 = 0{,}1$

$x_3 + 0{,}05\cdot x_5 + 0{,}5\cdot x_6 = 0{,}4,$

причем, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, $x_5 \geq 0$, $x_6 \geq 0$.

Данная система имеет бесконечное множество решений в зависимости от того, каким продуктам мы отдаем предпочтение. Далее я буду делать расчеты с учетом моих предпочтений в питании.

1) **<u>Если предположить, что в суточном меню содержаться и рыба, и мясо</u>**, а также предположить, что мяса мы в сутки съедаем 200 грамм, то есть x_4 = 0,2кг, молока – 300 грамм, то есть x_5 = 0,3кг и хлеба – 200 грамм, то есть x_6 = 0,2кг, то система ограничений примет вид:

$$\begin{cases} 0{,}12x_1 + 0{,}13\cdot 0{,}2 + 0{,}03\cdot 0{,}3 + 0{,}07\cdot 0{,}2 = 0{,}1 \\ x_2 + 0{,}03\cdot 0{,}2 + 0{,}03\cdot 0{,}3 = 0{,}1 \\ x_3 + 0{,}05\cdot 0{,}3 + 0{,}5\cdot 0{,}2 = 0{,}4 \end{cases}$$

Из 1-го уравнения: $0{,}12x_1 = 0{,}1 - 0{,}026 - 0{,}009 - 0{,}014 = 0{,}051$

$x_1 = 0{,}051 / 0{,}12 = 0{,}425 \Rightarrow$ за сутки желательно съедать 425 грамм рыбы.

Из 2-го уравнения: $x_2 = 0{,}1 - 0{,}006 - 0{,}009 = 0{,}085 \Rightarrow$ в сутки нужно съесть 8,5 грамм масла.

Из 3-го уравнения: $x_3 = 0{,}4 - 0{,}015 - 0{,}1 = 0{,}285 \Rightarrow$ в сутки нам требуется съесть 285 грамм сахара (с учетом сладостей).

Итак, наш рацион должен включать в себя: 425 грамм рыбы, 8,5 грамм масла, 285 грамм сахара, 200 грамм мяса, 300 грамм молока.

Далее составим целевую функцию, исходя из количества продуктов и их наименьших цен:

L = (x_1, x_2, x_3, ... x_6) = 68·0, 425 + 150·0, 085 + 27·0, 285 + 170·0, 2 + 35·0, 3 + 19·0, 2=28,9 + 12,75 + 7,695+ 34+10,5 + 3,6= 97,445 руб. ≈ 97 руб.

Вывод: для соблюдения диеты, включающей в себя необходимое количество для организма человека белков, жиров и углеводов минимальные затраты составят 97 рублей в день.

2) Если предположить, что в суточном меню содержится только рыба и отсутствует мясо, то я составляю диету для, так называемого, «рыбного» дня.

Также предположим, что в сутки мы съедаем сахара 220 грамм, т.е. x_3 = 0,22кг; мяса по условию нет, т. е. x_4=0; а хлеба съедаем 300 грамм, т. е. x_6 = 0,3кг, то составим систему согласно нашим предположениям и отсутствию в меню мяса:

$$\begin{cases} 0{,}12\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot 0{,}22 + 0{,}13\cdot 0 + 0{,}03\cdot x_5 + 0{,}07\cdot 0{,}3 = 0{,}1 \\ 0\cdot x_1 + x_2 + 0\cdot 0{,}22 + 0{,}03\cdot 0 + 0{,}03\cdot x_5 + 0\cdot 0{,}3 = 0{,}1 \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0{,}22 + 0\cdot 0 + 0{,}05\cdot x_5 + 0{,}5\cdot 0{,}3 = 0{,}4 \end{cases}$$

Из 3-го уравнения находим, что x_5=0,6кг, т.е. за сутки желательно выпивать 600 грамм молока (2,5 стакана).

Из 2-го уравнения получаем, что x_2=0,082кг, т.е. в суточном меню должно присутствовать масло в количестве 82 грамм.

И далее, из 1-го уравнения имеем, что x_1=0,5кг, или наше меню должно содержать 500 грамм рыбы.

Следовательно, наш «рыбный» день должен содержать 500 грамм рыбы, 82 грамма масла, 220 грамм сахара, 0 грамм мяса, 600 грамм молока, 300 грамм хлеба.

А сейчас нам следует составить целевую функцию, учитывая минимальные цены продуктов:

L (x_1, x_2, x_3, x_5, x_6) = 68·0,5 + 150·0,082 + 27·0,22 + 35·0,6 +19·0,3 = 34 + 12,3 + 5,94 + 21 + 5,7 = 78,94 руб. ≈ 79 рублей

Вывод: для соблюдения «рыбной» диеты, включающей в себя необходимое количество для организма человека белков, жиров и углеводов минимальные затраты составят 79 рублей в день.

Задача №2. Расчет диеты по основным макроэлементам – кальций, магний ,калий и фосфор.

В нашей стране в 2005 году были введены нормы "адекватного уровня потребления" и "допустимого уровня потребления", которые касаются лишь 20 элементов. Выберем из этой таблицы нормы суточной потребности человека (в возрасте от 24 до 60 лет) в основных макроэлементах:

Элемент	**Кальций -**	**Магний -**	**Калий-**	**Фосфор -**

	"зодчий костей"	"хранитель спокойствия"	«хранитель сердца»	"спутник кальция"
Суточная потребность (в мг)	1000мг	200мг	1000мг	700мг

Прежде чем исследовать задачу на составление диеты по основным макроэлементам – кальций, магний, калий и фосфор, рассмотрим **таблицу последствий для здоровья человека при недостаточности этих элементов:**

Макроэлемент	Признаки недостаточности
Кальций - "зодчий костей"	• боли в суставах • ломкость ногтей • экзема • повышенный уровень холестерина в крови • учащенный пульс • гипертензия • бессонница • мышечные спазмы • онемение рук или ног • бледность лица, артрит, рахит и разрушение зубов • ослабление умственных способностей
Магний - "хранитель спокойствия"	▪ ухудшение передачи нервных и мышечных импульсов – вызывая раздражительность и нервозность ▪ дезориентация во времени и пространстве ▪ бессонница ▪ нарушения пищеварения ▪ учащенное сердцебиение ▪ припадки ▪ вспышки гнева или раздражения.
Калий-«хранитель сердца»	▪ повышенная сухость кожи ▪ угри ▪ частые простудные заболевания ▪ ухудшение умственной деятельности

	▪ нервозность ▪ бессонница ▪ пониженная рефлекторная функция ▪ депрессия ▪ запор ▪ диарея ▪ отеки ▪ повышение уровня холестерина ▪ пониженное артериальное давление ▪ мышечная усталость и слабость ▪ тошнота и рвота
Фосфор - "спутник кальция"	▪ беспокойства ▪ раздражительности ▪ слабости ▪ дрожи ▪ боли в костях ▪ усталости ▪ неритмичного дыхания ▪ онемения ▪ повышения чувствительности кожи

Итак, в каких же продуктах содержатся кальций, магний, калий и фосфор? **Выберем из большого количества молочных продуктов наиболее уникальные:** ряженку и творог. **Что содержит ряженка? И что содержит творог?**

Витамины, макроэлементы, белки, жиры и углеводы	**Ряженка (на 100 грамм)**	**Творог (на 100 грамм)**
Витамин А	0,03 мг	0,05 мг
Витамин РР	0,1 мг	0,4 мг
Бета-каротин	0,02 мг	0,03 мг
Витамин В1	0,02 мг	0,04 мг
Витамин В2	0,13 мг	0,27 мг
Витамин С	0,3 мг	0,5 мг

Витамин Е	0,1 мг	0,2 мг
Кальций	**180 мг**	**164 мг**
Магний	**40 мг**	**22 мг**
Натрий	50 мг	41 мг
Калий	**91 мг**	**400 мг**
Фосфор	**92 мг**	**220 мг**
Белки	2.8% белка от своей массы.	18% белка от своей массы.
Жиры	около 4% от своей массы.	около 9% от своей массы.
Углеводы	4.2% от своей массы.	3% от своей массы.
Калорийность	67 ккал	169 ккал

Поставим задачу: составить математическую модель задачи, позволяющую сформировать из таких продуктов, как ряженка и творог суточную диету, которая содержала бы основные макроэлементы: кальций, магний, калий и фосфор не меньше минимальных обоснованных норм и требовала бы минимальных денежных затрат. Решим данную задачу графическим способом.

Обозначим количество ряженки в суточной диете через x_1, количество творога через x_2.

Составим неравенства с помощью данных из таблиц на суточную потребность **указанных макроэлементов** исходя из данного рациона питания:

1)$1800\cdot x_1 + 1640\cdot x_2 \geq 1000$ – ограничение по кальцию

2) $400\cdot x_1 + 220\cdot x_2 \geq 200$ ограничение по магнию

3) $910\cdot x_1 + 4000\cdot x_2 \geq 1000$ - ограничение по калию

4) $920\cdot x_1 + 2200\cdot x_2 \geq 700$ - ограничение по фосфору.

Рассмотрим уравнение: $1800\cdot x_1 + 1640\cdot x_2 = 1000$. Выразим из этого уравнения x_2:

$x_2 = \frac{-45\cdot x^1 + 25}{41}$. Для построения графика построим таблицу значений:

x_1	0	0,6
x_2	0,6	0

Далее рассмотрим уравнение: $400x_1 + 220\cdot x_2 = 200$. Выразим из этого уравнения x_2:

$x_2 = \frac{-20\cdot x^1 + 10}{11}$. Для построения графика построим таблицу значений:

x_1	0	0,5
x_2	0,9	0

Рассмотрим следующее уравнение: $910\cdot x_1 + 4000\cdot x_2 = 1000$. Выразим из этого уравнения x_2:

$x_2 = \frac{-91\cdot x^1 + 100}{400}$. Для построения графика построим таблицу значений:

x_1	0	1,1
x_2	0,25	0

И, наконец, рассмотрим четвертое уравнение: $920 \cdot x_1 + 2200 \cdot x_2 = 700$. Выразим из этого уравнения x_2: $x_2 = \frac{-46 \cdot x^1 + 35}{110}$. Для построения графика построим таблицу значений:

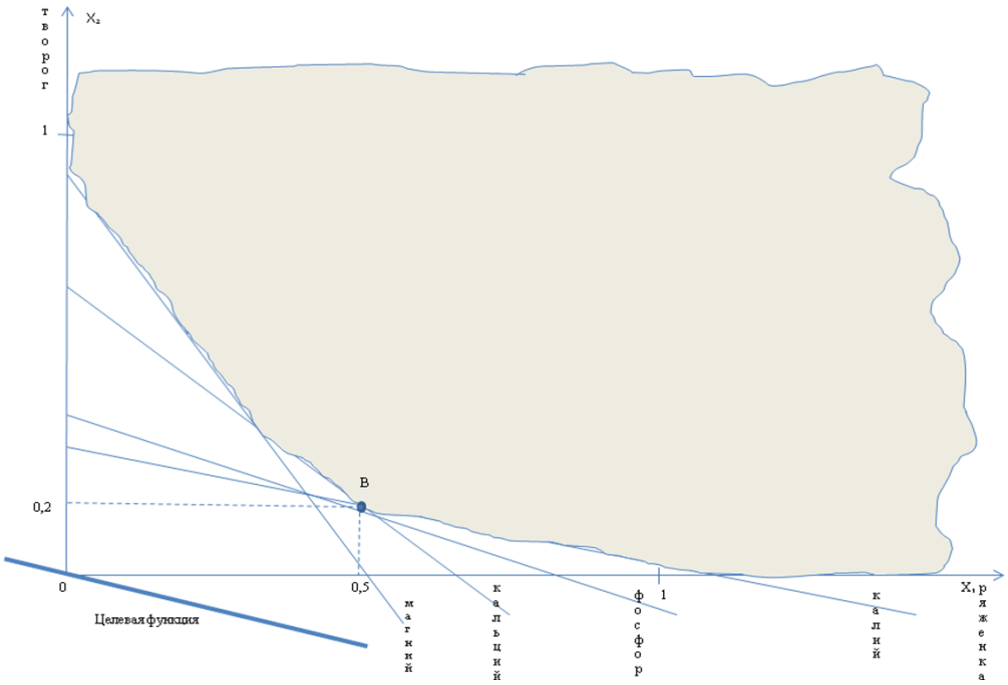
x_1	0	0,8
x_2	0,3	0

Для составления целевой функции исследуем **цены на обозначенные продукты в разных магазинах:**

Название магазина	Ряженка (за 1кг)	Творог (за 1 кг)
ОАО «Молоко Бурятии»	50 руб	120 руб
«Абсолют»	58руб	130-140руб
«Либерти»	53руб	125руб
«Барис»	52 руб	140 руб

Итак, самую дешевую ряженку и самый дешевый творог продают в магазине ОАО «Молоко Бурятии». Составляем целевую функцию: $F = 50 \cdot x_1 + 120 \cdot x_2$.

Пусть $50 \cdot x_1 + 120 \cdot x_2 = 0$. Отсюда $x_2 = -\frac{5 \cdot x_1}{12}$. Построим график функции $x_2 = -\frac{5 \cdot x_1}{12}$ и будем осуществлять параллельный перенос его вдоль оси ОУ вверх, т.е. это равносильно увеличению значений выражения $50 \cdot x_1 + 120 \cdot x_2$.



Чтобы **целевая функция принимала минимальное значение,** ее график должен пересечь многоугольник ограничений в точке B(0,5; 0,2). Это значит, чтобы дневной рацион содержал большой набор макроэлементов (не менее 1000мг кальция, не менее 200 мг магния, не менее 1000 мг калия и не менее 700 мг фосфора) и чтобы затраты при этом были минимальные, **человеку <u>можно</u> в течение суток выпить <u>два стакана ряженки и съесть 200 грамм творога</u>.**

Найдем значение целевой функции: F = 50·0,5 + 120· 0,2 =49 руб.

Ряженка – уникальный кисломолочный продукт:

- ✓ богата комплексом витаминов, ферментов, биологически активных веществ, незаменимых аминокислот;
- ✓ содержит большое количество живых молочнокислых микроорганизмов;
- ✓ нормализует деятельность желудочно-кишечного тракта;
- ✓ защищает организм от пищевых аллергий;
- ✓ способствует регулированию обмена веществ;
- ✓ усиливает деятельность иммунной системы;
- ✓ придает коже здоровый цвет;
- ✓ снимает усталость.

<u>Задача №3. Расчет диеты по основному макроэлементу – кальцию.</u>

Рассмотрим самый важнейший макроэлемент - **кальций**, без которого **жизнь человеческого организма невозможна.** Суточная потребность человека в кальции составляет 1000 мг. Кальций формирует скелет человека, составляет структурную основу костей и зубов, оказывает значительное влияние на процессы свертывания крови, регулирует мышечное сокращение, снимает уровень проницаемости стенок сосудов, нормализует обмен веществ, обладает противовоспалительным действием. Человек способен удовлетворить потребность организма в этом необходимом элементе с помощью своего рациона питания. Поэтому важно знать, в каких продуктах содержится кальций, в каких количествах их нужно употреблять. Как правило, дефицит кальция в организме человека приводит к развитию такого заболевания, как остеопороз. Особенно необходимо следить за поступлением достаточного количества кальция с продуктами питания людям, предпочитающим низкокалорийные диеты.

Итак, в каких продуктах содержится кальций? Представляю таблицу стоимости тех продуктов питания, которые я выбрала для исследования:

	Молоко	Сыр (твердые сорта)

Содержание кальция (в 1кг)	1200 мг	8000-10000 мг
Стоимость (за 1 кг) в магазине ОАО «Молоко Бурятии» в п. Аэропорт	40 рублей	250 рублей

Поставим задачу, определить некоторый набор продуктов, который, с одной стороны, обеспечивал бы суточную потребность человека в кальции, а с другой – имел бы минимальную стоимость.

Чтобы решить эту задачу графически, выберем два вида продуктов, например, молоко и сыр. Необходимо определить, сколько молока и сколько сыра следует включить в дневной рацион, чтобы при минимальных затратах в нем оказалось не менее 1000мг кальция и не менее 0,2кг молока и не менее 0,05 кг сыра.

Пусть x_1 это количество молока, x_2 - сыра. Тогда ограничения имеют вид:

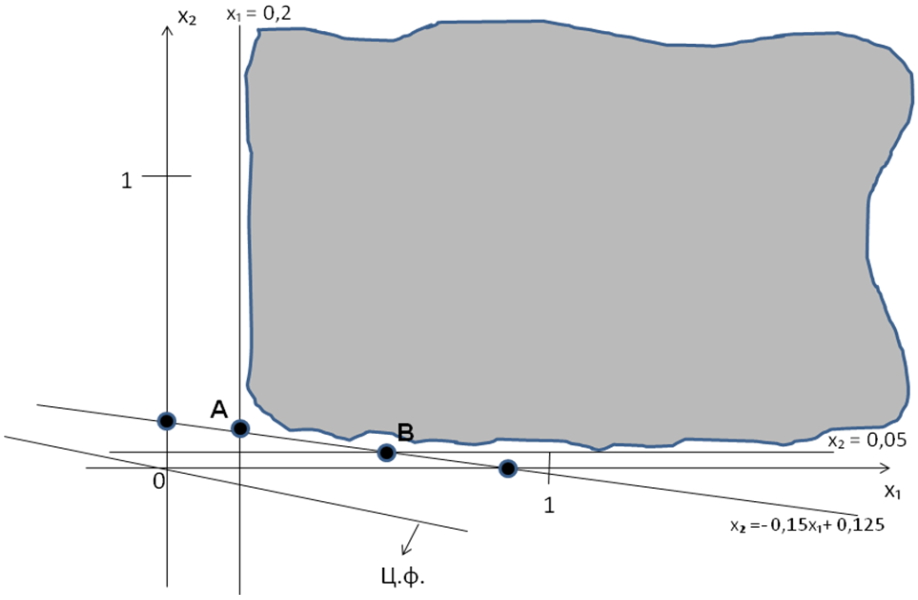
$$\begin{cases} 1200x_1 + 8000x_2 \geq 1000 \\ x_1 \geq 0{,}2 \\ x_2 \geq 0{,}05 \end{cases}$$

Рассмотрим уравнение $1200x_1 + 8000x_2 = 1000 \Rightarrow 6x_1 + 40x_2 = 5 \Rightarrow x_2 = -0{,}15 \cdot x_1 + 0{,}125$

Далее, целевая функция: $F(x_1, x_2) = 40 \cdot x_1 + 250 \cdot x_2$

Пусть $40 \cdot x_1 + 250 \cdot x_2 = 0$, отсюда $x_2 = -0{,}16 \cdot x_1$

Необходимо найти такие x_1 и x_2, при которых целевая функция принимает минимальное значение. Построим область допустимых решений задачи:



Будем осуществлять параллельный перенос графика $x_2 = -0{,}16 \cdot x_1$ вдоль оси OX_2 вверх, т.е. это равносильно увеличению значений выражения $40x_1 + 250x_2$. Чтобы **целевая функция**

принимала минимальное значение, ее график должен пересечь отрезок АВ в точке А. Она является точкой пересечения прямых $x_1 = 0,2$ и $x_2 = -0,15 \cdot x_1 + 0,125$.

Отсюда $x_2 = -0,15 \cdot 0,2 + 0,125 = 0,095$

$\Rightarrow x_1 = 0,2$кг; $x_2 = 0,095$кг

Найдем значение целевой функции:

$F(x_1, x_2) = 40 \cdot 0,2 + 250 \cdot 0,095 = 8 + 23,75 = 31,75 \approx 32$ (руб)

Итак, чтобы дневной рацион содержал не менее 1000мг кальция и чтобы затраты при этом были минимальные, человеку необходимо ежедневно выпивать 1 стакан молока (200 грамм) и съедать 95 грамм сыра. При этом затраты составят 32 рубля в день.

Задача№4. Составление рациона питания, включающего в себя жизненно важные витамины.

Известно, что 1кг лимонов содержит 150мг витамина С, а 1кг яблок - 75 мг витамина С. Известно также, что человеку необходимо употреблять 75 мг витамина С в сутки. Сколько апельсинов и сколько яблок следует включить в дневной рацион, чтобы при минимальных затратах в нем оказалось 75 мг витамина С, не менее 0,25кг апельсинов и не менее 0,25кг яблок, если 1кг апельсинов стоит 90р., а 1кг яблок – 60р.?

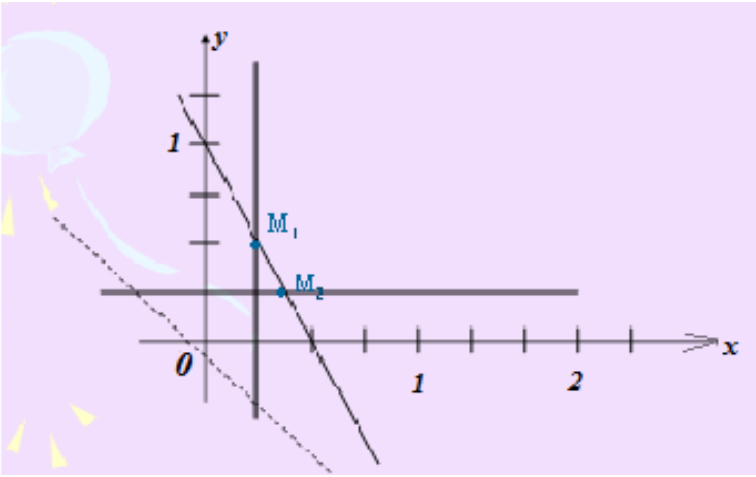
Фрукты	Дневной рацион	Содержание витамина С (в 1 кг)	Стоимость 1кг
Апельсины	x кг	150мг	90р
Яблоки	y кг	75мг	60р

Ограничения имеют вид:

$$\begin{cases} x \geq 0,25 \\ y \geq 0,25 \\ 150x + 75y = 75 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0,25 \\ y \geq 0,25 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0,25 \\ y \geq 0,25 \\ y = -2x + 1 \end{cases}$$

Целевая функция: $\mathbf{F(x, y) = 90x + 60y}$

Необходимо найти такие x и y, при которых целевая функция принимает минимальное значение. Построим область допустимых решений задачи:



Пусть 90x + 60y = 0; отсюда y = -3/2·x

Построим график функции y = -3/2·x и будем осуществлять параллельный перенос его вдоль оси ОУ вверх, т.е. это равносильно увеличению значений выражения 90x + 60y. Чтобы **целевая функция принимала минимальное значение,** ее график должен пересечь отрезок M_1M_2 в точке M_2. Она является точкой пересечения прямых y = 0,25 и

y = -2x +1. Решение системы уравнений:

$$\begin{cases} y = 0{,}25 \\ y = -2x + 1 \end{cases}; \qquad \begin{cases} y = 0{,}25 \\ x = 0{,}375 \end{cases}.$$

Далее находим: F (x, y) = 90· 0,375 + 60·0,25 = 48,75р.

<u>Итак, чтобы дневной рацион содержал 75мг витамина С и чтобы затраты при этом были минимальные, человеку необходимо ежедневно съедать 0,375кг апельсинов и 0,25кг яблок.</u>

Следующую задачу я взяла из *Исследования Операций: Приложения и Алгоритмы, Издание четвертое*, автор Вейн Л. Уинстон (Томсон, 2004 г.). В этом сборнике задача только сформулирована. А я ее решила! Предлагаю посмотреть решение.

<u>Задача № 5</u>.Моя диета требует, чтобы вся пища, которую я ем, принадлежала к одной из четырех "основных пищевых групп": шоколадное пирожное, мороженое, газированная вода и творожный пудинг. Одно пирожное стоит $0.50, одна порция мороженого стоит $0.20, одна бутылка колы стоит $0.30, и один кусок пудинга стоит $0.80. Каждый день я должен получать не менее 500 калорий, 6 унций (1 унция = 28,35 грамм) шоколада, 10 унций сахара и 8 унций жира. Содержание питательных веществ

на единицу для каждого вида пищи приведено в таблице ниже. Удовлетворите мои потребности в питании с наименьшими затратами.

Ежедневные потребности в пище: 1000 килокалорий, 6 унций шоколада, 10 унций сахара,8 унций жира.

Таблица содержания питательных веществ на единицу для каждого вида пищи и стоимость:

	Количество килокалорий	Количество шоколада (унции)	Количество сахара (унции)	Количество жира (унции)	Стоимость пищи за единицу
Шоколадное пирожное (1 шт. или 100 грамм)	400	3	2	2	$0.50
Шоколадное мороженое (1 порция,100 грамм)	200	2	2	4	$0.20
Газированная вода (1 бутылка, 250 грамм)	150	0	4	1	$0.30
Ананасовый пудинг (1 кусок, 350 грамм)	500	0	4	5	$0.80

- x_1: количество шоколадных пирожных с орехами
- x_2: количество порций шоколадного мороженого
- x_3: количество бутылок газированной воды
- x_4 : количество кусков ананасового творожного пудинга

Согласно потребностям в этих продуктах ограничения-равенства, сведенные в систему, имеют вид:

$$\begin{cases} 400x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 500x_4 = 1000 \;\Big|:50 \\ 3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 10 \;\Big|:2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 1x_3 + 5x_1 = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} 8x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 20 \\ 3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 6 \\ 1x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + 4x_2 + 1x_3 + 5x_1 = 8 \end{cases}$$

Решаем эту систему уравнений методом Гаусса-Жордана. Для этого следует 3-е уравнение поставить на первое место и ввести матрицу. В матрице записываем все коэффициенты уравнений:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ 8 & 4 & 3 & 10 & 20 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Из второй строчки вычитаем первую, умножив ее на 8:

$$\begin{array}{rrrrr} 8 & 4 & 3 & 10 & 20 \\ -\;8 & 8 & 16 & 16 & 40 \\ \hline 0 & -4 & -13 & -6 & -20 \end{array}$$

Таким образом, вторая строка матрицы, умноженная на -1 будет выглядеть так:

0 4 13 6 20

Аналогично, для получения нуля в начале 3-й строки вычитаем из нее 1-ую, умноженную на 3:

$$\begin{array}{rrrrr} 3 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ -\ 3 & 3 & 6 & 6 & 15 \\ \hline 0 & -1 & -6 & -6 & -9 \end{array} \qquad \text{3 строка: } \begin{array}{rrrrr} 0 & -1 & -6 & -6 & -9 \\ 0 & 1 & 6 & 6 & 9 \end{array} \Big|\cdot(-1)$$

Из четвертой строки вычитается первая, умноженная на 2:

$$\begin{array}{rrrrr} 2 & 4 & 1 & 5 & 8 \\ -\ 2 & 2 & 4 & 4 & 10 \\ \hline 0 & 2 & -3 & 1 & -2 \end{array}$$

Матрица примет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 13 & 6 & 20 \\ 0 & 1 & 6 & 6 & 9 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Аналогичным образом решаем далее до того момента, когда это будет выглядеть так:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 11 & 18 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 149 & 31 \end{pmatrix}$$

Из четвертой строки матрицы имеем, что $149 \cdot x_4 = 31 \Rightarrow x_4 \approx 0{,}2$

Из 3-й строки: $11 \cdot x_3 + 18 \cdot 0{,}2 = 16 \Rightarrow x_3 = 1{,}2$

Из 2-й строки: $1 \cdot x_2 + 6 \cdot 1{,}2 + 6 \cdot 0{,}2 = 9 \Rightarrow x_2 = 0{,}6$

И, наконец, из 1-й строки: $1 \cdot x_1 + 1 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 1{,}2 + 2 \cdot 0{,}2 = 5 \Rightarrow x_1 = 1{,}6$

Следовательно, пирожного нам нужно съесть 1,6·100=160 грамм, мороженого 0,6·100=60 грамм, газированной воды выпить 1,2·250=300 грамм, а творожного пудинга съесть 0,2·350=70 грамм.

Согласно ценам на продукты (в долларах), составим целевую функцию: $F=0{,}5x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}3x_3 + 0{,}8x_4$. Определим затраты с помощью этой формулы: $F=0{,}5 \cdot 1{,}6 + 0{,}2 \cdot 0{,}6 + 0{,}3 \cdot 1{,}2 + 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 1{,}88$ доллара

Переведем эти деньги в рубли, умножив на приблизительный курс доллара 30 рублей: 1,88·30 = 56,4 рубля ≈56 рублей

<u>Вывод:</u> для соблюдения этого рациона, а именно количества килокалорий и необходимых организму питательных веществ в день нужно съедать 160 грамм пирожного, 60 грамм мороженого, 70 грамм творожного пудинга и выпивать 300 грамм газированной воды. При этом затраты составят ≈56 рублей.

V. Заключение

Диета есть не что иное, как искусство управления своими потребностями, соблюдения разумного режима питания, понимания биологических ритмов своего организма, согласования своей жизни с природой. **Линейное программирование** в задачах о диете позволяет точно рассчитать количество продуктов, требуемых человеку для соблюдения рациона питания, а главная его функция это **свести к минимуму все денежные затраты, что позволяет контролировать свой бюджет и расходы.** Каждый человек понимает, что когда придерживаешься некоторой диеты и даже целых систем питания, то это конечно будет способствовать не только оздоровлению организма, но профилактике, и даже лечению от массы заболеваний, что в наше время очень актуально.

VI. Список использованной литературы и Интернет-ресурсов:

1. Гладких Б.А., Методы оптимизации и исследование операций для бакалавров информатики. Часть 1.Линейное программирование. Томск,2008.
2. Вейн Л. Уинстон, Исследования Операций: Приложения и Алгоритмы, Издание четвертое, (Томсон, 2004 г.).
3. Вершик А. М., О Л. В. Канторовиче и линейном программировании.
4. Беляева Э. С., Монахов В.М. Экстремальные задачи. М.: Просвещение, 1997.
5. Математика в экономике. Часть 1. Линейная алгебра, аналитическая геометрия и линейное программирование, А. С. Солодовников, В. А. Бабайцев, А. В. Браилов, И. Г. Шандра.
6. Возняк Г. М., Гусев В. А. Прикладные задачи на экстремумы. М.: Просвещение, 1985.
7. Данциг Дж., Линейное программирование, его применения и обобщения, М., 1966.
8. Еремин И. И., Астафьев Н. Н., Введение в теорию линейного и выпуклого программирования, М., 1976.
9. Н.А.Терешин «Прикладная направленность школьного курса математики». – М.: Просвещение, 1990 г.
10. http://matmetod-popova.narod.ru
11. http://www.grandars.ru/student/vysshaya-matematika/model-zadachi-lineynogo-programmirovaniya
12. http://www.ja-zdorov.ru/ kalcij
13. http://www.bio-lavka.kiev.ua