Этот доклад занял I место на городской НПК-2010 и опубликован на сайте «Открытый педагогический форум -2012»

Городская научно-практическая конференция «Шаг в будущее»:

Доклад

«Решение экономических задач методами математического моделирования и их применение в жизни »

Выполнила:
Юзаю Ксения,
ученица 9 «а» класса

Руководитель:
Конева Галина Михайловна,
учитель математики,
«Отличник просвещения РФ»,
Победитель Конкурса лучших учителей
России (2009 г.)

Оглавление.

Раздел 1. Вступление.

Экономика как наука об объективных причинах функционирования и развития общества пользуется разнообразными количественными характеристиками, а поэтому вобрала в себя большое число математических методов.

Актуальность данной темы состоит в том, что в современной экономике используются оптимизационные методы, которые составляют основу математического программирования

Целью данной работы является изучение некоторых оптимизационных методов, применяемых при решении экономических задач.

Эта работа представляет собой попытку рассказать о некоторых, не изучаемых обычно в школьной программе, методах математического программирования. Многие задачи, с которыми приходится иметь дело в повседневной практике, являются многовариантными. Среди множества возможных вариантов в условиях рыночных отношений приходится отыскивать наилучшие варианты при ограничениях, налагаемых на природные, экономические и технологические возможности. В связи с этим возникла необходимость применять для анализа и синтеза экономических ситуаций и систем математические методы и современную вычислительную технику. Такие методы объединяются под общим названием – **математическое моделирование**.

Методы математического моделирования связаны с насущными потребностями планирования и организации производства. Они позволяют наиболее рациональным образом распределить ограниченные ресурсы: будь то задача наилучшего использования ограниченных производственных ресурсов для выпуска определенного набора продуктов, так называемая задача планирования производства, или задача наиболее эффективного использования транспортных средств. При этом линейное программирование позволяет получать такое распределение точно, а не на «глазок». С такими задачами в наше время приходится иметь дело представителям самых разных специальностей. Технологи стараются так организовать производство, чтобы выпускалось как можно больше продукции. Конструкторы пытаются разработать прибор для космического корабля так, чтобы масса прибора была наименьшей. Экономисты стараются спланировать связи завода с источниками сырья так, чтобы транспортные расходы оказались минимальными, и т.д. Итак, большую часть своих усилий человек тратит на поиск наилучшего, т.е. оптимального решения поставленной задачи.

Как, располагая определенными ресурсами, добиваться наиболее высокого жизненного уровня, наивысшей производительности труда, наименьших потерь, максимальной прибыли, минимальной затраты времени – так ставятся вопросы, над которыми приходится думать каждому члену общества.

Математическое моделирование – область математики, разрабатывающая теорию и численные методы решения многомерных экстремальных задач с ограничениями, т.е задач на экстремум функции многих переменных с ограничениями на область изменения этих переменных.

Функцию, экстремальное значение которой надо найти в условиях экономических возможностей, называют *целевой* или *критерием оптимальности*. Экономические возможности формализуются в виде *системы ограничений*. Все это составляет математическую модель. *Математическая модель* задачи – это отражение оригинала в виде функций, уравнений, неравенств, цифр и т.д. Модель задачи математического *моделирования* включает:

1) совокупность неизвестных величин, действуя на которые, систему можно совершенствовать. Их называют *планом задачи*.
2) целевую функцию. Целевая функция позволяет выбирать наилучший вариант. Это может быть прибыль, объем выпуска или реализации, затраты производства.

Один из разделов математического *моделирования* – **линейное программирование,** т.е. направление, занимающееся методами решения задачи о минимуме или максимуме линейных функций на выпуклых многогранниках. Линейным оно называется потому, что основывается на решении линейных уравнений. Методы линейного программирования широко применятся во всех отраслях народного хозяйства. Особенно широкое применение они получили при решении задач экономии ресурсов.

Несмотря на широту применения метода линейного программирования, он учитывает лишь три особенности экономических задач - **большое количество переменных, ограниченность ресурсов и необходимость целевой функции.** Конечно, многие задачи с другими особенностями можно свести к линейной оптимизации, но это не дает нам права упустить из виду другой хорошо разработанный метод математического моделирования - **динамическое программирование**. По сути, задача динамического программирования является описанием многошаговых процессов принятия решений. Задачу динамического программирования можно сформулировать следующим образом: имеется некоторое количество ресурса x, которое можно использовать N различными способами. Если обозначить через x_i количество ресурса, используемое i-m способом, то каждому способу сопоставляется функция полезности (x_i), выражающая доход от этого способа. Предполагается, что все доходы измеряются в одинаковых единицах и общий доход равен сумме доходов, полученных от использования каждого способа.

И теперь можно поставить задачу: найти общий доход от использования ресурсов всеми способами.

Раздел 2. Некоторые экономические понятия и соотношения между ними.

Введем обозначения некоторых экономических понятий и соотношения между ними:

- П. – Прибыль
- R. – Рентабельность
- З. – Затраты
- n – количество продукции
- М. – цена единицы продукции
- С. – себестоимость единицы
- П. = Мn – З.
- С = $\frac{З}{n}$
- R = $\frac{П}{З} = \frac{Мn - З}{З} = \frac{Мn}{З} - 1 = \frac{М}{С} - 1.$

Из этой формулы делаем вывод:

1.Если С. < М, то R. > 0- предприятие рентабельно.

2.Если С. = М, то R. = 0- предприятие нерентабельно.

3.Если С.>М, то R.<0 - предприятие нерентабельно.

Раздел 3. Метод динамического моделирования в задаче о наиболее выгодной аренде воздушного судна.

Авиакомпания планирует взять в аренду воздушное судно для перевозки пассажиров по маршруту «Улан-Удэ- Москва». Можно выбрать два типа самолетов: «ТУ-154» или «Боинг-737». По прогнозам цена на авиационное топливо измениться через полгода с 14000 рублей до 18000 тысяч за 1 тонну. Причем, антимонопольный комитет РФ не разрешает увеличивать стоимость пассажирских билетов. Минимальный срок аренды составляет полгода-24 недели. Интенсивность полетов – 1 раз в неделю. Экономистам авиакомпании необходимо **рассчитать, какое воздушное судно взять в аренду и на какой срок, чтобы получить наибольшую прибыль.** При расчетах использовать следующие данные:

Тип воздушного судна	Коли-чество пасса-жиров	Расходы авиа-компании (в руб)	Коли-чество топлива (в тоннах)	Стои-мость топлива (в руб)	Стои-мость билета (на 1 чел в руб)	Стои-мость аренды (за 1 год в руб)
«ТУ-154»	130	500000	34	14000 18000	11000	5000000

«Боинг-737»	100	300000	18	14000 18000	10000	6000000

Расходы авиакомпании включают в себя:

- диспетчерское обслуживание
- информационное обслуживание
- брифинг экипажа
- лидирование воздушного судна
- оплата за использование взлетно-посадочной полосы, рулежной дорожки и места стоянки
- техническое обслуживание самолета
- обработка пассажиров
- авиационная безопасность (осмотр самолета)
- бортовое питание

Выполним расчеты на 1 полугодие:

Тип воздушного судна	З (затраты)	М (цена единицы продукции)	n (кол-во продукции)	Mn	П (прибыль)	С=З:n (себестоимость)	R=П:З (рентабельность)
«ТУ-154»	23424000	11000	130	34320000	10896000	7507	0,47
«Боинг-737»	13248000	10000	100	24000000	10752000	5520	0,81

1) З=(500000+34·14000)·24=2342400(рублей)

   M·n=11000·130·24=34320000(рублей)

   П= M·n- З=34320000 – 23424000 =10896000(рублей)

   $C = \frac{З}{n} = \frac{23424000}{130 \cdot 24} = 7507$(рублей)

   $R = \frac{П}{З} = \frac{10896000}{23424000} = 0,47$

2)З=(300000+18·14000)·24=13248000(рублей)

$M \cdot n = 10000 \cdot 100 \cdot 24 = 24000000$(рублей)

$П = M \cdot n - З = 24000000 - 13248000 = 10752000$(рублей)

$C = \frac{З}{n} = \frac{13248000}{100 \cdot 24} = 5520$(рублей)

$R = \frac{П}{З} = \frac{10752000}{13248000} = 0,81$

Выполним расчеты на 2 полугодие:

Тип воздушного судна	З (затраты)	М (цена единицы продукции)	n (кол-во продукции)	Mn	П (прибыль)	С=З:n (себестоимость)	R=П:З (рентабельность)
«ТУ-154»	26688000	11000	130	34320000	7632000	8553	0,29
«Боинг-737»	14976000	10000	100	24000000	9024000	6240	0,60

Расчеты для «Ту-154»:

$З = (500000 + 18000 \cdot 34) \cdot 24 = 26688000$

$M \cdot n = 11000 \cdot 130 \cdot 24 = 34320000$

$П = 7632000$

$C = \frac{З}{n} = \frac{26688000}{130 \cdot 24} = 8553$

$R = \frac{П}{З} = \frac{7632000}{26688000} = 0,29$

Расчеты для «Боинг-737»:

$З = (300000 + 18000 \cdot 18) \cdot 24 = 14976000 M \cdot n = 10000 \cdot 100 \cdot 24 = 24000000$

$П = 9024000$

$C = \frac{З}{n} = \frac{14976000}{100 \cdot 24} = 6240$

$R = \frac{П}{З} = \frac{9024000}{14976000} = 0,60$

Рассмотрим теперь 4 варианта аренды воздушного судна и произведем расчеты по максимуму прибыли:

Варианты аренды	1 полугодие	2 полугодие	Годовая прибыль (в рублях)
1	«ТУ-154»	«ТУ-154»	13528000
2	«Боинг-737»	«Боинг-737»	13776000

3	«ТУ-154»	«Боинг-737»	16148000
4	«Боинг-737»	«ТУ-154»	12884000

Расчеты по максимуму прибыли:

1) (10896000 – 2500000)+(7632000 – 2500000)= 13528000
2) (10752000 – 3000000)+(9024000 – 3000000)= 13776000
3) (10896000 – 2500000)+ (9024000 – 3000000)= 16148000
4) (10752000 – 3000000)+ (7632000 – 2500000)= 12884000

Вывод: Для получения наибольшей прибыли данной авиакомпании следует выбрать вариант №3 – на 1 полугодие взять в аренду самолет «ТУ- 154», а во 2 полугодии заменить его на «Боинг-737».

Раздел 4. Метод линейного моделирования.

Задача 1. Суть метода.

Рассмотрим математическую суть метода линейного моделирования на примере:

Найти числа x_1 и x_2, которые удовлетворяют системе ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2 \le 10 \\ 2x_1+x_2 \le 6 \\ x_1+x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

при которых функция $F(x_1;x_2)=2x_1+3x_2$ принимает максимальное значение.

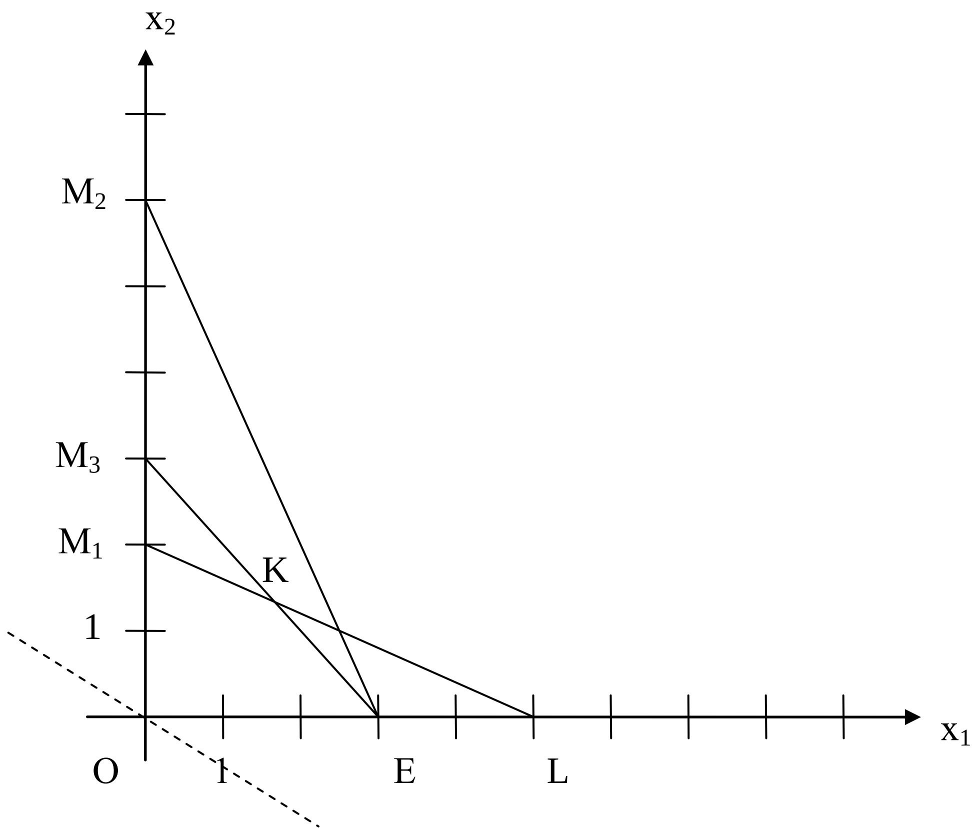
Решение: ***Допустимым решением*** приведенной задачи называется пара чисел, удовлетворяющая всем ограничениям задачи. ***Оптимальным решением*** называется решение, при котором функция F принимает максимальное значение.

Построим область допустимых решений задачи.

Обозначим M_1L график $2x_1+5x_2 \le 10$.

Отрезком M_2E график $2x_1+x_2 \le 6$

Отрезком M_3E график $x_1+x_2 \leq 3$



Областью допустимых решений задачи является четырехугольник OM_1KE. Нужно на этой области найти пару чисел x_1 и x_2, при которых функция $F(x_1;x_2)$ принимает максимальное значение. Пусть $2x_1+3x_2=0$, $x_2=-2/3x_1$

Осуществим параллельный перенос этого графика вдоль оси OX_2 вверх. Это будет равносильно увеличению значений выражения $2x_1+3x_2$. Последней точкой, которая будет общей у переносимого графика и у четырехугольника OM_1KE будет точка K, которая является точкой пересечения таких прямых, как:

$2x_1+5x_2 = 10$ и $x_1+x_2 = 3$. Найдем координаты точки K, решив систему:

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2=10 \\ x_1+x_2=3 \end{cases} \Bigg| \bullet(-2) \quad \begin{cases} 2x_1+5x_2= 10 \\ -2x_1-2x_2=-6 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_2=4 \\ x_1+x_2=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=4/3 \\ x_1=3 - 4/3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2= 4/3 \\ x_1= 5/3 \end{cases}$$

Найдем теперь значение искомой функции: $F(x_1; x2) = 2\bullet 5/3 + 3\bullet 4/3 = 10/3 + 12/3 = 22/3$

В практических задачах функция F называется ***целевой*** *или* ***производственной****, а многоугольник типа OM_1KE –* ***многоугольником ограничений.***

Задача 2.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть в колхозе требуется распределить площадь пашни между двумя культурами с учетом ограничений, указанных в таблице.

Цель: Получить максимальную прибыль и максимум рентабельности.

Культура	Площадь, га	Урожай, ц/га	Затраты, р./га	Цена за 1ц	Затраты тракторо-смен	Затраты человеко-дней на 1га
1	x	10	50	6	0,1	2
2	y	15	80	8	0,24	10

Даны ресурсы производства: 1) количество земли – 1800га; 2) тракторо-смен – 300; 3) человеко-дней – 8000; 4) потребность в культуре №1 – 10000ц; 5) в культуре №2 – 7500ц.

Задачу необходимо решить по оптимизации 2-х различных критериев, а именно: а) по максимуму прибыли; б) по максимуму рентабельности

Решение: Ограничение задачи имеет следующий вид:

1) $x + y \leq 1800$ (ограничение по S)
2) $0{,}1x + 0{,}24y \leq 300$ (ограничение по тракторо-сменам)
3) $2x + 10y \leq 8000$ (ограничение по человеко-дням)
4) $10x \leq 10000$ (ограничение по потребности в 1-ой культуре)
5) $15y \leq 7500$ (ограничение по потребности во 2-ой культуре)

Кроме того, ясно, что $x \geq 0$, $y \geq 0$.

По формуле П = Мп – З получаем: $П = 6•10x + 8•15y – 50x – 80y. =60x + 120y – 50x – 80y$

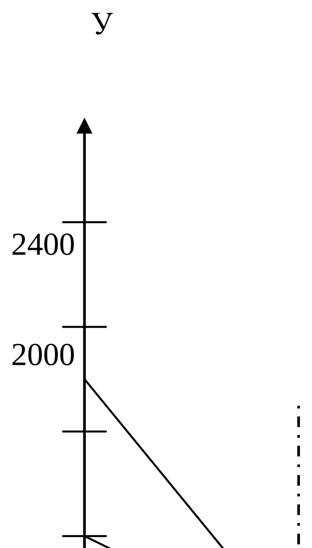
$П = 10(x + 4y)$.

Для рентабельности имеем формулу: $R=\frac{П}{З}$ или $R = \frac{10(x+4y)}{50x+80y}$

Для прибыли с 1га имеем формулу $p = \frac{10(x+4y)}{x+y}$

Построим многоугольник ограничений:

$$\begin{cases} x + y \leq 1800 \\ 0{,}1x + 0{,}24y \leq 300 \\ 2x + 10y \leq 8000 \\ 10x \geq 10000 \\ 15y \geq 7500,\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y \leq 1800 \\ 10x + 24y \leq 30000 \\ x + 5y \leq 4000 \\ x \geq 1000 \\ y \geq 500,\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y \leq 1800 \\ 5x + 12y \leq 15000 \\ x + 5y \leq 4000 \\ x \geq 1000 \\ y \geq 500,\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$$



1600

1200

800

400

400 800 1200 1600 2000 2400 2800 3200 3600 4000 x

Вариант А: Решение по максимуму прибыли.

П = 10(x + 4y); x + 4y = max; y = -1/4x

Если x = 800, то y = -200; если x = 1600, то y = -400.

Совершаем параллельный перенос прямой y = -1/4·x вдоль оси OY вверх до тех пор, пока она не выйдет из многоугольника ограничений. По рисунку видно, что решению соответствует точка E. Точка E является точкой пересечения прямых x + y = 1800 и x + 5y =4000.

Решив систему из двух уравнений: x + y = 1800 и x + 5y = 4000, получим x = 1250, y = 550.

Вывод: Значит, чтобы получить максимальную прибыль, необходимо под культуру №1 занять 1250га, а под культуру №2 – 550га.

Вариант Б: решение по максимуму рентабельности: R = $\frac{10(x+4y)}{50x+80y}$

Выразим y через x: y = k·x, где k = $\frac{5R-1}{4(1-2R)}$

Уравнение представляет собой уравнение пучка прямых, проходящих через начало координат. Увеличение ***k*** влечет за собой увеличение R. А так как нам нужно, чтобы R достигло наибольшего значения, то для этого достаточно поворачивать луч y = kx, выходящий из начала координат, против часовой стрелки до тех пор, пока он не выйдет за пределы «многоугольника ограничений». Решение (как мы видим по рисунку) в точке F.

Так как точка F является точкой пересечения прямых x = 1000 и x + 5y = 4000, то, решая систему уравнений, находим координаты точки: x=1000; y=600.

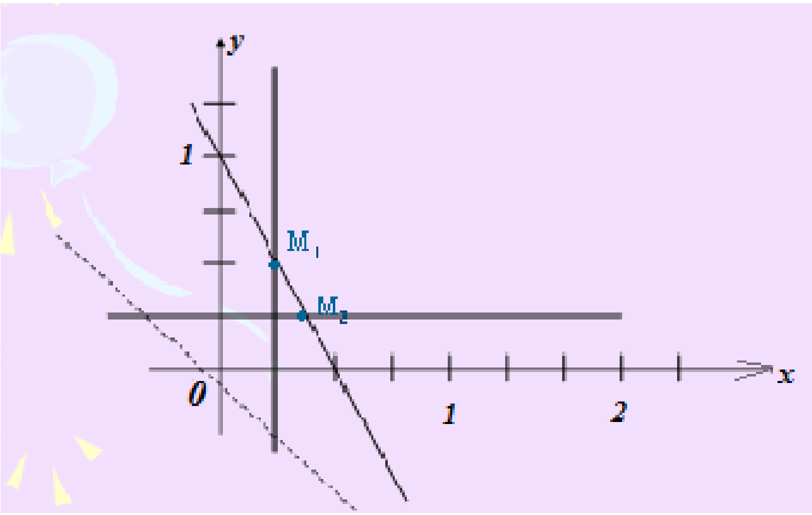
Ответ: x = 1000га, y = 600га.

Задача 3. Применим метод линейного программирования при решении бытовой **задачи о наиболее выгодном распределении материальных средств** при покупке определенного набора продуктов. Известно, что 1кг лимонов содержит 150мг витамина С, а 1кг яблок - 75 мг витамина С. Известно также, что человеку необходимо употреблять 75 мг витамина С в сутки. Сколько апельсинов и сколько яблок следует включить в дневной рацион, чтобы при минимальных затратах в нем оказалось 75 мг витамина С, не менее 0,25кг апельсинов и не менее 0,25кг яблок, если 1кг апельсинов стоит 60р., а 1кг яблок – 40р.?

Фрукты	Дневной рацион	Содержание витамина С (в 1 кг)	Стоимость 1кг
Апельсины	x кг	150мг	60р
Яблоки	y кг	75мг	40р

Ограничения имеют вид: $x \geq 0,25$; $y \geq 0,25$; $150x + 75y = 75$ или $y = -2x + 1$

Целевая функция: **F (x, y) = 60x + 40y** Необходимо найти такие x и y, при которых целевая функция принимает минимальное значение. Построим область допустимых решений задачи:



Пусть $60x + 40y = 0$; отсюда $y = -6/4x$ Построим график функции $y = -6/4x$ и будем осуществлять параллельный перенос его вдоль оси ОУ вверх, т.е. это равносильно увеличению значений выражения $60x + 40y$. Чтобы целевая функция принимала минимальное значение, ее график должен пересечь отрезок M_1M_2 в точке M_2. Она является точкой пересечения прямых $y = 0,25$ и $y = -2x + 1$. Решение системы уравнений: $y = 0,25$; $x = 0,375$. Далее находим: $F (x, y) = 60 \cdot 0,375 + 40 \cdot 25 = 16,25$р.

Итак, чтобы дневной рацион содержал 75мг витамина С и чтобы затраты при этом были минимальные, человеку необходимо ежедневно съедать 0,375кг апельсинов и 0,25кг яблок.

Задача 4. Фирма имеет возможность рекламировать свою продукцию, используя местные радио- и телевизионную сети. Затраты на рекламу в бюджете фирмы ограничены величиной 1000$ в месяц. Каждая минута радиорекламы обходится в 5$, а каждая минута телерекламы - в 100$. Фирма хотела бы использовать радиосеть, по крайней мере, в два раза чаще, чем сеть телевидения, но при этом фирма решила, что время радиорекламы не должно превышать двух часов. Опыт прошлых лет показал, что объем сбыта, который обеспечивает каждая минута телерекламы, в 25 раз больше сбыта, обеспечиваемого одной минутой радиорекламы. Определите оптимальное распределение финансовых средств, ежемесячно отпускаемых на рекламу, между радио- и телерекламой.

Решение: Обозначим за Xт - количество финансовых средств, отпускаемых на телерекламу, а за Xр - количество финансовых средств, отпускаемых на радиорекламу. Сразу же можем записать одно ограничение на общее количество средств, отпускаемых на рекламу:

$x_P + x_T \leq 1000$

Количество минут, используемых для рекламы на радио, будет вычисляться следующим образом: $\frac{x_T}{100}$, а количество минут, используемых для рекламы на телевидении: $\frac{x_P}{5}$

Для простоты будем считать, что время на рекламу можно покупать посекундно. Условие использования радиосети по крайней мере в два раза чаще, чем сеть телевидения, запишется следующим ограничением:

$$\frac{x_P}{5} \geq 2 \cdot \frac{x_T}{100} \quad \Rightarrow$$
$$10 \cdot x_P \geq x_T \quad \Rightarrow$$
$$10 \cdot x_P - x_T = 0$$

Решение о том, что время радиорекламы не должно превышать двух часов, запишется в виде:

$$\frac{x_P}{5} \leq 120 \quad \Rightarrow$$
$$x_P \leq 600$$

А теперь запишем целевую функцию. По условию задачи мы должны найти оптимальное значение распределения финансовых средств, чтобы эффективность от рекламы была максимальной. Если эффективность одной минуты радиорекламы обозначить за единицу, то эффективность одной минуты телерекламы будет равна двадцати пяти. Получим следующую функцию:

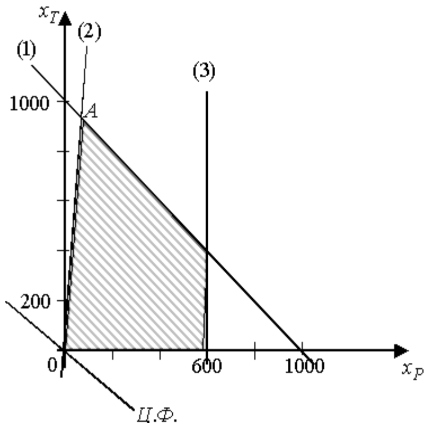
$$f(x) = 1 \cdot \frac{x_P}{5} + 25 \cdot \frac{x_T}{100} = \frac{1}{5} \cdot x_P + \frac{1}{4} \cdot x_T \to \max$$

Из условия задачи естественно вытекают ещё два ограничения: $\begin{cases} x_P \geq 0 \\ x_T \geq 0 \end{cases}$

Сведем все ограничения и целевую функцию в одну систему:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{5} \cdot x_p + \frac{1}{4} \cdot x_T \to \max \\ x_p + x_T \leq 1000 \\ 10 \cdot x_p - x_T \geq 0 \\ x_p \leq 600 \\ x_p, x_T \geq 0. \end{cases}$$

Решим систему графически:



Точка А соответствует максимальному значению целевой функции.

Таким образом, получили, что на радиорекламу надо тратить 90,90$, а на телерекламу - 909,09$, что в минутах составляет на радио - 18,18 минуты, а на телевидении - 9,9 минуты.

Раздел 5. Заключение.

В настоящее время получило всеобщее признание то, что успех развития многих областей науки и техники существенно зависит от развития многих направлений математики. Математика становится средством решения проблем организации производства, поисков оптимальных решений и, в конечном счете, содействует повышению производительности труда и устойчивому поступательному развитию народного хозяйства. Использование экстремальных задач при изучении математики оправдано тем, что они с достаточной полнотой закладывают **понимание того, как человек ищет, постоянно добивается решения жизненных задач, чтобы получающиеся результаты его деятельности были как можно лучше.** Решая задачи указанного типа, наблюдаем, с одной стороны, абстрактный характер математических понятий, а с другой – большую эффективную их применимость к решению жизненных практических задач. Экстремальные задачи помогают ознакомиться с некоторыми идеями и прикладными методами школьного курса математики, которые часто применяются в трудовой деятельности, в познании окружающей действительности. Решение экстремальных задач способствует приобретению учащимися экономических знаний. По моему мнению, экономическое образование «своего рода средство социальной защиты», своеобразный компенсаторный механизм, увеличивающий шансы на выживание в условиях рыночной конкуренции. Экономическая подготовка - важный фактор повышения жизнеспособности, жизнестойкости в современном социуме.